

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA NAȚIONALĂ

CLASA a VIII-a 10.05.2025

Problema 1. (7 puncte)

- a) Determinați numerele raționale a și b pentru care are loc relația: $\frac{a}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}} + \frac{b}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} = 1$
- b) Arătați că oricare ar fi numerele reale nenegative x, y, z are loc inegalitatea:

$$2(\sqrt{x(y^{25} + z^{2025})} + \sqrt{y^{25}(x + z^{2025})} + \sqrt{z^{2025}(x + y^{25})}) \leq 3(x + y^{25} + z^{2025})$$

Soluție.

a) $\frac{a}{\sqrt{5}-2} + \frac{b}{\sqrt{5}+2} = 1 \dots\dots\dots(1p)$
 $a(\sqrt{5} + 2) + b(\sqrt{5} - 2) = 1 \Rightarrow \sqrt{5}(a + b) + 2(a - b) = 1 \dots\dots\dots(1p)$
 $a + b = 0; a - b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{4} \dots\dots\dots(1p)$
 b) $m_g \leq m_a$

$$\sqrt{x(y^{25} + z^{2025})} \leq \frac{x+y^{25}+z^{2025}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x(y^{25} + z^{2025})} \leq x + y^{25} + z^{2025} \dots\dots\dots(1p)$$

$$\sqrt{y^{25}(x + z^{2025})} \leq \frac{y^{25}+x+z^{2025}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{y^{25}(x + z^{2025})} \leq x + y^{25} + z^{2025} \dots\dots\dots(1p)$$

$$\sqrt{z^{2025}(x + y^{25})} \leq \frac{z^{2025}+y^{25}+x}{2} \Rightarrow 2\sqrt{z^{2025}(x + y^{25})} \leq x + y^{25} + z^{2025} \dots\dots\dots(1p)$$

Prin adunarea celor trei relații rezultă inegalitatea.(1p)

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2+3x+7}{3x+1}$. Să se arate că punctele de coordonate numere naturale, care aparțin graficului funcției sunt vârfurile unui trapez ortodiagonal.

Soluție.

$$\frac{2x^2+3x+7}{3x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow (3x + 1) \mid 56 \dots\dots\dots(1p)$$

$$x \in \{0; 1; 2; 9\} \dots\dots\dots(1p)$$

$$f(0) = 7 \Rightarrow A(0; 7); f(1) = 3 \Rightarrow B(1; 3); f(2) = 3 \Rightarrow C(2; 3); f(9) = 7 \Rightarrow D(9; 7) \dots\dots\dots(1p)$$

Reprezentarea grafică (1p)

$$\left. \begin{matrix} AD \parallel BC \parallel OX \\ AB \nparallel CD \end{matrix} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ trapez} \dots\dots\dots(1p)$$

$$\left. \begin{matrix} A, C \in G_g \Rightarrow g(x) = -2x + 7 \\ B, D \in G_h \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow G_g \cap G_h = M(\frac{9}{5}; \frac{17}{5}) \dots\dots\dots(1p)$$

Apicând R.T.P. $\Rightarrow$ diagonalele perpendiculare $\Rightarrow ABCD$ trapez ortodiagonal. (1p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $AB = 12\text{cm}$, $VO = 6\sqrt{2}\text{cm}$, unde $\{O\} = AC \cap BD$, iar punctele M, N, P mijloacele laturilor BC , VA și respectiv AB .

- Arătați că dreapta VM este paralelă cu planul (NOP) .
- Determinați sinusul unghiului dintre dreapta VB și planul (VAD) .

Soluție.

a) Figura..... (1p)

$$\left. \begin{array}{l} OP \parallel BC \\ NO \parallel VC \\ OP, NO \subset (NOP), OP \cap NO = \{O\} \\ BC, VC \subset (VBC), BC \cap VC = \{C\} \end{array} \right\} \Rightarrow (NOP) \parallel (VBC)..... (1p)$$

$$\left. \begin{array}{l} (NOP) \parallel (VBC) \\ VM \subset (VBC) \end{array} \right\} \Rightarrow VM \parallel (NOP).....(1p)$$

b) Fie $BQ \perp (VAD) \Rightarrow pr_{(VAD)}^{VB} = VQ \Rightarrow \sphericalangle(VB, (VAD)) = \sphericalangle(VB, VQ) = \sphericalangle(QVB).....(1p)$

$$BQ = 4\sqrt{6}\text{ cm}..... (2p)$$

$$\sin \sphericalangle(QVB) = \frac{\sqrt{6}}{3}.....(1p)$$

Problema 4. (7 puncte)

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AD \perp BC$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$. Demonstrați că triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel.

Soluție.

Figura..... (1p)

$$\left. \begin{array}{l} Construim AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp BC \\ BC \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (DAO) \Rightarrow BC \perp DO (1)..... (1p)$$

$$\left. \begin{array}{l} AO \perp (BCD) \\ Fie OE \perp BD \end{array} \right\} T3 \perp \Rightarrow AE \perp BD; \left. \begin{array}{l} AO \perp (BCD) \\ Fie OF \perp CD \end{array} \right\} T3 \perp \Rightarrow AF \perp CD.....(1p)$$

$$\triangle AED \equiv \triangle AFD \Rightarrow ED \equiv DF.....(1p)$$

$$\triangle DOE \equiv \triangle DOF \Rightarrow \sphericalangle ODE \equiv \sphericalangle ODF \Rightarrow DO \text{ bisectoarea } \sphericalangle EDF (2).....(1p)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \triangle BCD \text{ isoscel} \Rightarrow BD \equiv DC.....(1p)$$

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD \Rightarrow AB \equiv AC \Rightarrow \triangle ABC \text{ isoscel}.....(1p)$$

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!