

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
BAREM CORECTARE – ETAPA NAȚIONALĂ
CLASA a VII-a 10.05.2025

Problema 1. (7 puncte)

Se consideră numerele reale pozitive a, b, c, d și e , astfel încât $a + b + c + d + e = 1$.

- a) Dacă $a = \frac{1}{4}$, arătați că rădăcina pătrată a sumei celorlalte patru numere este mai mică decât 1.
- b) Arătați că $\sqrt{a(b+c+d+e)} + \sqrt{b(a+c+d+e)} + \sqrt{c(a+b+d+e)} + \sqrt{d(a+b+c+e)} + \sqrt{e(a+b+c+d)} \leq 2,5$.

Soluție.

a) Dacă $a = \frac{1}{4}$, rezultă că $b + c + d + e = \frac{3}{4}$. Atunci $\sqrt{b+c+d+e} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{2}{2} = 1$(2p)

b) Din relația $a + b + c + d + e = 1$ rezultă că $b + c + d + e = 1 - a$, $a + c + d + e = 1 - b$, etc.....(1p)

Atunci $\sqrt{a(b+c+d+e)} = \sqrt{a(1-a)}$, $\sqrt{b(a+c+d+e)} = \sqrt{b(1-b)}$, etc.....(1p)

Aplicând inegalitatea mediilor $m_g \leq m_a$, obținem

$\sqrt{a(1-a)} \leq \frac{a+1-a}{2} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{b(1-b)} \leq \frac{b+1-b}{2} = \frac{1}{2}$, etc.....(2p)

Însumând inegalitățile obținute, obținem:

$\sqrt{a(1-a)} + \sqrt{b(1-b)} + \sqrt{c(1-c)} + \sqrt{d(1-d)} + \sqrt{e(1-e)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2,5$(1p)

Problema 2. (7 puncte)

a) Arătați că numărul $a = \sqrt{2025 + 2 + 4 + 6 + \dots + 4048}$ este natural.

b) Arătați că numărul $b = \sqrt{\underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{22 \dots 2}_{n \text{ cifre}}}$ este natural, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

a) $a = \sqrt{2025 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2024)} = \sqrt{2025 + 2024 \cdot 2025} = 2025 \in \mathbb{N}$ (2p)

b) Fie $a = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}}$. Atunci $\underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ cifre}} = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}} \cdot 10^n + \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}} = 10^n \cdot a + a$(1p)

$\underbrace{22 \dots 2}_{n \text{ cifre}} = 2 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}} = 2a$(1p)

$b = \sqrt{10^n \cdot a + a - 2a} = \sqrt{10^n \cdot a - a} = \sqrt{(10^n - 1)a}$(1p)

$b = \sqrt{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}} a} = \sqrt{9 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}} a} = \sqrt{9a^2} = 3a \in \mathbb{N}$(2p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

În triunghiul dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, BB' este bisectoarea unghiului B , $B' \in AC$. BB' intersectează înălțimea AD și mediana AM în punctele P , respectiv N . ($D, M \in BC$). Să se arate că $\frac{AN}{NM} = \frac{2DP}{AP}$.

Soluție.

Figura corectă.....(1p)

BN este bis. $\sphericalangle ABM \xrightarrow{T.bis.în \Delta ABM} \frac{AN}{NM} = \frac{AB}{BM}$. Dar $BM = \frac{BC}{2} \Rightarrow \frac{AN}{NM} = \frac{2AB}{BC}$(2p)

BP este bis. $\sphericalangle ABD \xrightarrow{T.bis.în \Delta ABD} \frac{DP}{AP} = \frac{BD}{AB}$ (1).....(1p)

Aplicăm teorema catetei în triunghiul dreptunghic ABC : $AB^2 = BD \cdot BC \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{BC}$(1p)

Înlocuind BD în relația (1), obținem $\frac{DP}{AP} = \frac{AB}{BC}$(1p)

Dar $\frac{AN}{NM} = \frac{2AB}{BC}$. Rezultă astfel că $\frac{AN}{NM} = \frac{2DP}{AP}$(1p)

Problema 4. (7 puncte)

Fie ABC un triunghi echilateral și AD înălțimea dusă din A , $D \in BC$. Punctul E aparține înălțimii AD , astfel încât $\sphericalangle EBD = 40^\circ$, iar punctul F aparține dreptei EC , astfel încât C este între E și F , iar $EF \equiv BC$. Să se arate că triunghiurile AEC și BCF au ariile egale.

Soluție.

Figura corectă.....(1p)

Fie E' simetricul lui E față de BC . $\Delta BDE \equiv \Delta CDE' (C.C) \Rightarrow A_{BDE} = A_{CDE'}$(1p)

Rezultă că $A_{BEC} = A_{BDE} + A_{CDE} = A_{CDE} + A_{CDE'} = A_{ECE'}$(1p)

Dar $\Delta ECE'$ este isoscel, $\sphericalangle ECD = 40^\circ$, rezultă că $\sphericalangle DCE' = 40^\circ$ și, cum $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, se obține că

$\sphericalangle ACE' = 100^\circ$(1p)

Deci, $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ACE' = 100^\circ$, $BE = CE'$, $EF = BC = AC$. Rezultă că $\Delta ACE' \equiv \Delta FEB (L.U.L.)$(1p)

Rezultă că $A_{ACE'} = A_{EFB}$. Dar $A_{ACE'} = A_{ACE} + A_{ECE'}$, iar $A_{EFB} = A_{BCF} + A_{BEC}$. Cum $A_{BEC} = A_{ECE'}$, rezultă că $A_{ACE} = A_{BCF}$(2p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!