OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA NAȚIONALĂ

CLASA a VI-a 10.05.2025

Problema 1. (7 puncte)

a) Arătați că numărul $4^{2025}+1$ nu poate fi scris ca sumă a două numere prime.

b) Fie a, b, c numere raționale pozitive nenule. Știind că $a, 2b, 3c$ sunt direct proporționale cu $2b+3c,\ a+3c,\ a+2b$, calculați $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Soluție.

a)

$$\left.\begin{array}{r}\text{Presupunem } 4^{2025}+1=p+q \text{ unde } p,q \text{ numere prime}\\ 4^{2025}+1 \text{ număr impar}\end{array}\right\} \Longrightarrow p+q\ impar \Longrightarrow p\ par\ sau\ q\ par$$ ....**(1p)**

Fie $p=2 \Longrightarrow 4^{2025}+1=2+q \Longrightarrow q=4^{2025}-1$ .... **(1p)**

$4^{2025}=(1+3)^{2025}=M_3+1 \Longrightarrow 4^{2025}-1=M_3 \Longrightarrow q \,\vdots\, 3$

Cum q nu poate fi 3 $\Longrightarrow q$ nu este prim........ **(1p)**

b) $\frac{a}{2b+3c}=\frac{2b}{a+3c}=\frac{3c}{a+2b}=\frac{a+2b+3c}{2(a+2b+3c)}=\frac{1}{2}$. .... **(1p)**

$\frac{a}{2b+3c}=\frac{1}{2} \Longrightarrow 2a=2b+3c$ (1)

$\frac{2b}{a+3c}=\frac{1}{2} \Longrightarrow 4b=a+3c$ (2)

Din (1)-(2) $\Longrightarrow a=2b \Longrightarrow b=\frac{a}{2}$........**(1p)**

$\frac{3c}{a+2b}=\frac{1}{2} \Longrightarrow 6c=a+2b \Longrightarrow c=\frac{a}{3}$ ....**(1p)**

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{3}{a}\right)=11$........**(1p)**

Problema 2. (7 puncte)

Suma a trei numere naturale a, b, c este 2025, $a<b$. Împărțind al treilea număr la suma primelor două numere, se obține câtul 20 și restul 30. Dacă cel mai mare divizor comun al primelor două numere este 19, determinați cele trei numere.

Soluție.

Fie a, b, c cele trei numere. $a+b+c=2025,\ c=(a+b)\cdot 20+30, 30<a+b$ .... **(2p)**

$a+b=95$ ....**(1p)**

$(a,b)=19 \Rightarrow a=19\cdot x,\ \ b=19\cdot y,\ \ (x,y)=1$ ....**(2p)**

$x+y=5, (x,y)=1 \Rightarrow$

x	1	2
y	4	3

a	19	38
b	76	57
c	1930	1930

........**(2p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

În triunghiul ΔABC măsura $\sphericalangle A > 90°$, iar lungimea segmentului $BC = 10\ cm$. Mediatoarea laturii AB intersectează latura BC în M, iar mediatoarea laturii AC intersecterază latura BC în N.

a) Determinați perimetrul triunghiului AMN.

b) Dacă cele două mediatoare se intersectează în P, arătați că semidreapta AP este bisectoarea$\sphericalangle MAN$.

Soluție.

a) Figura.. **(1p)**

$M \in$ mediatoarei laturii $AB \Rightarrow MB = MA$; $N \in$ mediatoarei laturii $AC \Rightarrow NC = NA$ ....**(1p)**

$P_{\Delta AMN} = AM + MN + AN = BM + MN + NC = BC = 10\ cm$ ....**(1p)**

b) $\left.\begin{array}{l} P \in \text{ mediatoarei laturii } AB \Rightarrow PB = PA \\ P \in \text{ mediatoarea laturii } AC \Rightarrow PC = PA \end{array}\right\} \Rightarrow PB = PC \Rightarrow \Delta PBC\ isoscel \Rightarrow \sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle PCB$.......**(1p)**

$\Delta BMP \equiv \Delta AMP \Rightarrow \sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MAP$..**(1p)**

$\Delta CNP \equiv \Delta ANP \Rightarrow \sphericalangle NCP \equiv \sphericalangle NAP$..**(1p)**

$\sphericalangle MAP \equiv \sphericalangle NAP \Rightarrow AP\ bisectoarea\ \sphericalangle MAN$...**(1p)**

Problema 4. (7 puncte)

Fie triunghiul ascuțitunghic ΔABC cu $AB \equiv AC$, $D \in BC, E \in AB$ și $F \in AC$ astfel încât $AD \perp AB, CE \perp AB$ și $DF \perp AC$. Arătați că $AE \equiv CF$.

Soluție.

Figura .... **(1p)**

ΔABC isoscel cu $AB = AC \Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = a$...**(1p)**

$\Delta CFD \Rightarrow \sphericalangle DCF = \sphericalangle ACB = a, opuse\ la\ vârf \Rightarrow \sphericalangle CDF = 90° - a$ ....**(1p)**

$\Delta ABD \Rightarrow \sphericalangle ADB = 90° - a \Rightarrow DC\ bisectoarea\ \sphericalangle ADF$..**(1p)**

$\left.\begin{array}{c} \Delta ABD \Rightarrow \sphericalangle ADB = 90° - a \Rightarrow DC\ bisectoarea\ \sphericalangle ADF \\ \text{Fie } CH \perp AD,\ H \in AD \end{array}\right\} \Rightarrow CH \equiv CF$...**(1p)**

$\left.\begin{array}{l} AD \perp AB \\ CE \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow EC \parallel AD \Rightarrow \sphericalangle ECA = \sphericalangle HAC\ alterne\ interne$...**(1p)**

$\left.\begin{array}{c} EC \parallel AD \Rightarrow \sphericalangle ECA = \sphericalangle HAC\ alterne\ interne \\ AC\ latura\ comună \end{array}\right\} I.U. \Rightarrow \Delta ECA \equiv \Delta HAC \Rightarrow AE \equiv CH \Rightarrow AE \equiv CF$. .... **(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!