

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
BAREM CORECTARE – ETAPA NAȚIONALĂ
CLASA a V-a 10.05.2025

Problema 1. (7 puncte)

Veverițele Riți, Piți și Miți au invitat la o petrecere în pijamale pe marele Leu, șireata Vulpe, cei trei Purceluși și pe cei doi Iepurași. Toți au servit de pe un platou câte un măr și câte două prune. Să se afle câte mere și câte prune erau pe platou știind că la început numărul prunelor era de patru ori mai mare decât cel al merelor, iar la final numărul prunelor rămase pe platou era de opt ori mai mare decât cel al merelor.

Soluție.

Notăm m numărul inițial al merelor, p numărul inițial al prunelor. La început $p = 4m$(2p)

Petrecăreții (10 la număr) au servit la început un măr și două prune, deci la final rămân $m - 10$ mere și $p - 20$ prune.....(2p)

La final $p - 20 = 8(m - 10)$(1p)

$m = 15, p = 60$(2p)

Problema 2. (7 puncte)

a) Să se arate că numărul $a = 8 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{2025}$ nu este pătrat perfect.

b) Să se determine penultima cifră a numărului 2^{2025} .

Soluție.

a) Observăm că $u(8 + 8^2 + 8^3 + 8^4) = 0$(1p)

Grupăm termenii sumei câte 4 și obținem

$u(a) = u(8 + 8^2 + 8^3 + 8^4) + u[8^4(8 + 8^2 + 8^3 + 8^4)] + \dots + u[8^{2000}(8 + 8^2 + 8^3 + 8^4)] + u(8^{2025}) =$
 $0 + 8 = 8$, care nu poate fi ultima cifră a unui pătrat perfect.....(2p)

b) $2^{2025} = (2^4)^{506} \cdot 2 = 16^{506} \cdot 2$(1p)

După ridicări la putere consecutive, obținem că $U_2(16^{5k}) = 76$, iar $506 = 5 \cdot 101 + 1$(1p)

Penultima cifră a lui 2^{2025} este penultima cifră a produsului $76 \cdot 16 \cdot 2$, adică 3.....(2p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Sandală și Pantof doresc să împartă primele 300 de numere naturale nenule în două grupe, astfel încât prima grupă să conțină 211 numere, iar suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeași. Aflați cele două grupe de numere.

Soluție.

Suma $1 + 2 + 3 + \dots + 300 = \frac{300 \cdot 301}{2} = 45150$, deci suma numerelor din fiecare grupă va fi 22575.....(1p)

Presupunem că prima grupă conține primele 211 numere naturale. Suma numerelor din prima grupă ar fi

$$1 + 2 + 3 + \dots + 211 = \frac{211 \cdot 212}{2} = 22366 \dots \dots \dots (2p)$$

Suma numerelor din cea de-a doua grupă ar fi atunci $45150 - 22366 = 22784 \dots \dots \dots (1p)$

Diferența dintre sumele numerelor din cele două grupe ar fi $22784 - 22366 = 418$, deci suma numerelor din prima grupă trebuie mărită cu 209, iar suma numerelor din a doua grupă trebuie micșorată cu 209.....(2p)

Dacă îl trecem pe 212 din cea de-a doua grupă în prima grupă și pe $212 - 209 = 3$ din prima în cea de-a doua grupă, cele două grupe vor îndeplini condițiile cerute.....(1p)

Problema 4. (7 puncte)

Să se determine numerele naturale nenule x și y pentru care
$$2023 + 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x = (1 + 3 + 5 + \dots + 89)^y.$$

Soluție.

Observăm că $1 + 3 + 5 + \dots + 89 = 45^2$, deci membrul drept este pătrat perfect.....(2p)

Pentru $x \geq 5$ avem $u(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x) = 0$ și $u(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x + 2023) = 3$, deci nu convine.....(2p)

Rezultă $x \leq 4$. Se verifică fiecare caz pt x și observăm că pentru $x = 2$ avem $2025 = 45^2$(2p)

Finalizare $x = 2, y = 1$(1p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!