Concursul național de Matematică
OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
BAREM CORECTARE – ETAPA NAȚIONALĂ
CLASA a VIII-a 23.05.2026

Problema 1. (20 puncte)

Se consideră numerele

$A = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2027} + \sqrt{2026})$ și

$B = (\sqrt{2} + \sqrt{1}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{4} + \sqrt{3}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2027} - \sqrt{2026})$.

Arătați că $A + B > 2$.

Soluție:

$A \cdot B = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2027} + \sqrt{2026})(\sqrt{2} + \sqrt{1}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2027} - \sqrt{2026})$ ....(4p)

$A \cdot B = (\sqrt{2} - \sqrt{1})(\sqrt{2} + \sqrt{1})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{4} - \sqrt{3})(\sqrt{4} + \sqrt{3}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2027} + \sqrt{2026})(\sqrt{2027} - \sqrt{2026})$..........(4p)

$A \cdot B = \left[\sqrt{2}^2 - \sqrt{1}^2\right] \cdot \left[\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2\right] \cdot \left[\sqrt{4}^2 - \sqrt{3}^2\right] \cdot \ldots \cdot \left[\sqrt{2027}^2 - \sqrt{2026}^2\right] = 1$......................................(4p)

$A, B > 0$, din inegalitatea mediilor $A + B \geq 2\sqrt{A \cdot B}$ ....(4p)

$\left.\begin{matrix} A \neq B \\ A \cdot B = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A + B > 2\sqrt{AB} = 2$..(4p)

Problema 2. (25 puncte)

Fie funcțiile liniare $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile: $3 \cdot f(2 - 3x) + 2f(x) = 14x + 18$ și $g(2 + 5x) = 10x - 2g(7) + 8$, pentru orice x număr real.

Arătați că $\sqrt{f(0) + g(1) + f(2) + g(3) + f(4) + g(5) + \cdots + f(2026) + g(2027) + 2026}$ este număr irațional.

Soluție:

$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \Longrightarrow f(2 - 3x) = a(2 - 3x) + b = 2a - 3ax + b$ ....(2p)

$\Longrightarrow 3 \cdot f(2 - 3x) + 2f(x) = -7xa + 6a + 5b = 14x + 18$..(3p)

$a = -2, b = 6 \Longrightarrow f(x) = -2x + 6$ ....(3p)

$g(7) = 6$...(2p)

$g(2 + 5x) = 10x - 4$...(3p)

$g(x) = 2x - 8$...(3p)

$f(2k) + g(2k + 1) = 0 \Longrightarrow$

$f(0) + g(1) + f(2) + g(3) + f(4) + g(5) + \cdots + f(2026) + g(2027) = 0$..(4p)

$\sqrt{f(0) + g(1) + f(2) + g(3) + f(4) + g(5) + \cdots + f(2026) + g(2027) + 2026} = \sqrt{2026}$ ....(2p)

$\sqrt{2025} < \sqrt{2026} < \sqrt{2116} \Longrightarrow 45 < \sqrt{2026} < 46 \Longrightarrow \sqrt{2026} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$...(3p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (20 puncte)

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ având dimensiunile $AB = a,\ BC = b,\ AA' = c$.

Dacă a, b, c verifică inegalitatea $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}$, calculați tangenta unghiului dintre dreapta BD' și planul (ACC').

Soluție:

Desen paralelipipedul dreptunghic ....(2p)

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \Longrightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}} + \frac{2}{\sqrt{bc}} + \frac{2}{\sqrt{ca}}$ ....(3p)

$\frac{1}{a} - \frac{2}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{2}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} - \frac{2}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{c} \leq 0$ ....(3p)

$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \leq 0$ ....(3p)

$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \leq 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \geq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow a = b = c \Longrightarrow$ $ABCDA'B'C'D'$ cub ....(3p)

$\{O\} = CA \cap BD, \{O'\} = C'A' \cap B'D'$

$BO \perp (ACC'),\ D'O' \perp (ACC') \Rightarrow pr_{(ACC')}BD' = OO' \Longrightarrow \sphericalangle(BD', (ACC')) = \sphericalangle(BD', OO') = \sphericalangle BD'D$....(3p)

$\Delta BDD'$ dreptunghic $\Longrightarrow tg\sphericalangle BD'D = \sqrt{2}$ ....(3p)

Problema 4. (25 puncte)

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu înălțimea $VO = 6\sqrt{2}\ cm$, iar punctul M aparținând segmentului OC astfel încât $VM = BM$ și $(VBM) \perp (VAB)$.

a) Calculați volumul piramidei.

b) Arătați că $4 \cdot AM = 3 \cdot AC$.

Soluție:

Desen piramidă patrulateră regulată ....(2p)

a) $\Delta DCM \equiv \Delta BCM \Longrightarrow DM = BM$....................(3p)

$DM = BM = VM$ ....(1p)

proiecția punctului M pe planul(VBD) este centrul cercului circumscris ΔVBD....................(2p)

$MO \perp (VBD) \Longrightarrow \{O\} = pr_{(VBD)}(M)$....................(1p)

ΔVBD dreptunghic isoscel....................(1p)

$BD = 12\sqrt{2}\ cm \Longrightarrow AB = 12\ cm$....................(2p)

$V = \frac{12^2 \cdot 6\sqrt{2}}{3} = 288\sqrt{2}\ cm^3$....................(3p)

b) $VA = VB = VC = VD = AB = 12\ cm \Longrightarrow$ fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale....................(2p)

Fie N mijlocul lui VB, $\Delta VMB\ isoscel \Longrightarrow MN \perp VB$ ....(2p)

$\left.\begin{array}{l}AN \perp VB \\ MN \perp VB\end{array}\right\} \Longrightarrow \sphericalangle[(VMB), (VAB)] = \sphericalangle ANM = 90^0$....................(1p)

$\left.\begin{array}{l}AO \perp (VBD) \\ NO \subset (VBD)\end{array}\right\} \Longrightarrow AO \perp ON$....................(1p)

Aplicăm teorema catetei în ΔANM dreptunghic $\Longrightarrow AN^2 = AO \cdot AM \Longrightarrow \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 6\sqrt{2} \cdot AM \Longrightarrow$

$AM = 9\sqrt{2}\ cm$....................(2p)

$\frac{AM}{AC} = \frac{9\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \Longrightarrow 4 \cdot AM = 3 \cdot AC$ ....(2p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!