OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
ETAPA NAȚIONALĂ 23.05.2026
CLASA a VII-a

Problema 1. (25 puncte)

a) Suma numerelor reale pozitive x și y este egală cu 20. Demonstrați că $S < 2$, unde $S = \frac{x}{30-y} + \frac{y}{30-x}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $x + 1 + \frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3} + \cdots + \frac{x+500}{500} = 500$.

Barem

a) $x + y = 20 \Longrightarrow x = 20 - y$ și $y = 20 - x$……………………………………………**(5p)**

$S = \frac{x}{10+(20-y)} + \frac{y}{10+(20-x)} = \frac{x}{10+x} + \frac{y}{10+y}$ ……………………………………**(5p)**

$x > 0, y > 0 \Longrightarrow S < \frac{x}{10} + \frac{y}{10} = \frac{x+y}{10} = \frac{20}{10} = 2$…………………………………**(5p)**

b) Ecuația este echivalentă cu: $x + 1 + \frac{x}{2} + \frac{2}{2} + \frac{x}{3} + \frac{3}{3} + \cdots + \frac{x}{500} + \frac{500}{500} = 500$…………**(3p)**

$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \cdots + \frac{x}{500} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{500 \text{ termeni}} = 500$……………………………………**(3p)**

$x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{500}\right) = 0 \Longrightarrow x = 0$…………………………………………**(4p)**

Problema 2. (25 puncte)

Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Pe latura BC se iau punctele M și N, astfel încât să avem $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{4}$.

a) Demonstrați că $AM = AN$.

b) Determinați valoarea raportului $\frac{MN}{BC}$.

Barem

a) Figura corectă………………………………………………………………**(5p)**

$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{BM}{BM+MC} = \frac{CN}{CN+NB} = \frac{1}{4+1} \Leftrightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{CN}{BC} = \frac{1}{5} \Longrightarrow BM = CN = \frac{1}{5}BC$…………**(8p)**

$\Delta ABM \equiv \Delta ACN(L.U.L.) \Longrightarrow AM = AN$…………………………………………**(6p)**

b) $MN = BC - (BM + CN) = BC - 2 \cdot \frac{1}{5}BC = \frac{3}{5}BC \Longrightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$…………………**(6p)**

Problema 3. (20 puncte)

Să se demonstreze că:

a) $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2}$. ***b)*** $\frac{19}{20} < \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} < \frac{77}{60}$.

Barem

a) $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{6}}{6} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{6} < \frac{\sqrt{6}}{6} < \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4}}{6} < \frac{\sqrt{6}}{6} < \frac{\sqrt{9}}{6}$…………………………**(5p)**

b) Folosind raționamentul de la punctul ***a)***, obținem

$\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{12}} < \frac{1}{3}, \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{20}} < \frac{1}{4}, \frac{1}{6} < \frac{1}{\sqrt{30}} < \frac{1}{5}$…………………………………**(8p)**

Adunând inegalitățile, obținem $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} < \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$,……**(3p)**

ceea ce implică $\frac{19}{20} < \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} < \frac{77}{60}$……………………………………**(4p)**

Problema 4. (20 puncte)
Dreptele paralele d_1 si d_2 sunt tăiate de secanta d_3. Notăm cu $\{C\} = d_1 \cap d_3$ și cu $\{D\} = d_2 \cap d_3$. Construim cercul $C(O, r)$, tangent dreptelor d_1, d_2 și d_3 și notăm cu $\{T\} = d_1 \cap C(O, r)$ și cu $\{Q\} = d_3 \cap C(O, r)$. Dacă $CQ = 12$ cm, $QD = 3$ cm, $\{B\} = OQ \cap d_1$, iar $\{P\} = OB \cap C(O, r)$, să se arate că $BT + BP = 2r$.

Barem

Figura corectă …………………………………………………………………………….**(5p)**

Fie $\{S\} = d_2 \cap C(O, r)$ și $U \in d_1$, astfel încât $DU \parallel ST$. Evident $O \in ST$, $UD = ST = 2r$, $TU = SD = DQ = 3$ cm, $TC = CQ = 12$ cm, $UC = TC - TU = 9$ cm……………………**(3p)**

Triunghiul UDC este dreptunghic și atunci $CD^2 = DU^2 + UC^2$, adică

$(12 + 3)^2 = (2r)^2 + (12 - 3)^2$. Obținem $r = 6$ cm.……………………………………………..**(5p)**

Pe de altă parte, triunghiurile dreptunghice TBO și QBC sunt asemenea (unghiul B este comun). Deducem

$\frac{BO}{BC} = \frac{BT}{BQ} = \frac{OT}{CQ}$, adică $\frac{BP+r}{BT+12} = \frac{BT}{BP+2r} = \frac{r}{12}$, deci $\frac{BP+6}{BT+12} = \frac{BT}{BP+12} = \frac{6}{12}$ ……………………..**(5p)**

Obținem $BT = 8$ cm, $BP = 4$ cm, deci $BT + BP = 2r$ …………………..……..…………**(2p)**